Serie N°6 3.M

EXERCICE N°1

Exprimer en fonction de cos x ou sin x les nombres suivants :

a) $\cos(3\pi + x)$; b) $\sin(-x - \pi)$; c) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$; d) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)$ e) $\sin(11\pi - x)$; f) $\cos\left(x - \frac{9\pi}{6}\right)$

g) $\cos(\pi - x) + \cos(x - 3\pi)$; h) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$;

i) $\sin(-x) - \cos(-x)$; j) $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$;

k) $\cos(-\pi - x) + \sin(x - \pi) + \sin(4\pi - x)$

EXERCICE N°2

1) Soit t un réel tel que $\sin t = \frac{3}{5}$. Calculer cos t dans chacun des cas suivantes :

a) $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

2) t est un réel tel que $\cos t = -\frac{1}{3}$. Calculer sin t dans chacun des cas suivants :

a) $t \in [0 ; \pi]$; b) $t \in]-\pi ; 0]$.

Donner une valeur approchée de t à 10^{-2} près dans chaque cas.

EXERCICE N°3

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

a) $4\cos^2 x - 3 = 0$; b) $\sin^2 x - \frac{1}{2} = 0$; c) $\tan^2 x = 3$

EXERCICE N°4

I/ A l'aide du cercle trigonométrique sur lequel on représentera les solutions, résoudre les inéquations suivantes :

1) Dans $]-\pi ; \pi]$: a) $\sin x \geq 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

2) Dans $[0 ; 2\pi[$: a) $\sin x < 0$; b) $\cos x < 0$; c) $\cos x \geq 0$.

II/

1/ Résoudre dans $]-\pi ; \pi[$ les inéquations suivantes :

a) $\cos x \leq -\frac{1}{2}$; b) $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

2/ Même question en donnant les solutions dans $[0 ; 2\pi[$.

a) $\cos x \leq -1$; b) $\frac{1}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$

Exercice N°5

I- Soit $T(x) = 1 + \cos 2x - 2\sqrt{3}\cos x \sin x$

1/ calculer $T(0)$; $T(5\pi)$ et $T(-\frac{\pi}{6})$

2/ Montrer que $T(x) = 1 + 2\cos(2x + \frac{\pi}{3})$

3/ Résoudre dans □ puis dans $[0, \pi]$ l'équation $T(x) = 1 - \sqrt{3}$

II- Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les inéquations :

a) $2\sin x + \sqrt{3} \geq 0$; b) $\sqrt{2}\cos(2x - \frac{\pi}{5}) \leq -\sqrt{3}$

EXERCICE N°6

I- Résoudre dans $\left]-\pi,\pi\right]$ puis dans IR

1/ $\sin x + \cos x = 0$; 2/ $2 - \cos x < 1$; 3/ $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; 4/ $2\cos^2 x > 1$

II-

1/ Résoudre dans $\left[0,2\pi\right[$ $2\cos 2x - 2\sqrt{3}\sin 2x = 2$

2/ Résoudre dans $\left[0,2\pi\right[$ a) $\cos(3x-\pi) < -\pi$; b) $\sin(-2x + \frac{2\pi}{5}) > \frac{3}{2}$

EXERCICE N°7

Soit $f : IR \to IR ; x \mapsto 1 + \cos 2x - \sin 2x$

1) a) Montrer que $f(x) = 2\sqrt{2}\ \cos x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $f(x) = 0$ et $f(x) > 0$

2) $g : \left[0,\pi\right] \to IR ; x \mapsto \dfrac{\sin 2x - 1}{1 + \cos 2x - \sin 2x}$

a) Déterminer le domaine de définition de g

b) Résoudre dans $[0, \pi]$: $g(x) \geq 0$

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_g$: $g(x) = \frac{1}{2}(\tan x - 1)$

b) En déduire que $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$

EXERCICE N°8

Soit l'application $f : \left[0,\pi\right] \to IR$

$x \mapsto -2\sin^2 x - \left(\sqrt{3} + 2\right)\cos x + \sqrt{3} + 2$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

2) Soit α l'élément de $[0,\pi]$ tel que $\tan\alpha = -\sqrt{2}$. Calculer $\cos\alpha$; $\tan\alpha$ puis $f(\alpha)$.

3) Montrer que pour tout $x \in [0,\pi]$; $f(x) = 2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)\cos x + \sqrt{3}$

4) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation $f(x) = 0$ puis l'équation $2\cos^2 x - (\sqrt{3} + 2)\ |\cos x| + \sqrt{3} = 0$

5) Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation $f(x) > 0$

6) Dans cette question x désigne un élément de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que $(\cos x - \sin x)^2 + (\cos x + \sin x)^2 = 2$

b) Exprimer $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x)$ à l'aide de cosx et sinx.

c) Résoudre l'équation $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + f(\pi - x) = \sqrt{3}$